Inmersión de subcategorías de *Top*∗ en Topos de Prehaces

Jorge Adelmo Hernández Pardo*
José Reinaldo Montañez Puentes**

Fecha de recepción: 15 de febrero de 2013
Fecha de aceptación: 30 de mayo de 2013

Resumen

Siguiendo algunas ideas expuestas por P.T Johnstone en [5], que se generalizan en [8], en este trabajo se muestra algunas maneras de sumergir subcategorías de *Top*∗ en topos de prehaces, que con más presición correponden a topos de *m-conjuntos*3.

Palabras clave

Topos de Grothendiek, topologías iniciales, topologías finales.

Abstract

Following some ideas by P. T Johnstone [5], which are generalizad in [8], in this paper we show some ways to immerse subcategories of *T op*∗ in topos of presheaves, with more precision in topos of *m - sets*.

Key words

Grothendieck topos, initial topologies, final topologies.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, johernandezp@udistrital.edu.co
** Universidad Nacional de Colombia, jrmontanezp@unal.edu.co

1. Introducción

En primer lugar este trabajo está dedicado a la memoria del profesor Carlos Javier Ruiz Salguero,Q.D.E.D, quien nos inspiró en el estudio de estos temas, discutidos en presencia de él.

Los topos de prehaces asociados a espacios topológicos, de hecho, ya guardan relación con la topología, ver por ejemplo [7], sin embargo nuestro interés en este trabajo es mostrar otros topos que guarden nuevas relaciones con la topología. Ahora bien, a pesar de que muchos de los conceptos de la teoría de topos son motivados desde la topología, no abundan en la literatura topos para el estudio de la topología. Con tal inquietud, en los años 70´s aparece un topos que contiene como subcategoría reflexiva a la categoría de los espacios secuenciales y denominado el topos de Johnstone [5], es de anotar que la categoría de los espacios secuenciales es una subcategoría reflexiva de Top. En [8] se generaliza esta construcción, y se muestra la manera en que subcategorías correflexivas de Top se extienden en topos de prehaces. En este artículo se desarrolla esta teoría en la categoría Top^*, y en particular se muestra, de manera original, una forma de sumergir subcategorías de Top^* en topos de prehaces. Dichos topos se construyen a partir del monoide de los endomorfismos de un espacio topológico punteado $M_{W^*} = [W^*, W^*]$, de esta manera los topos construidos son equivalentes a topos de Grotendieck. Ahora bien, si se parte de un monoide topológico M, construido a partir del monoide de un espacio topológico dado, se origina un topos geométrico, ver [8], en este capítulo se muestran topos geométricos construidos a partir de espacios topológicos punteados.

1 Los autores agradecen las discusiones sobre estos temas al profesor Carlos Javier Ruiz Salguero (Q.E.P.D.).

2. Conceptos básicos

2.1. La categoría de los espacios topológicos punteados

Definición 1. *La categoría de los espacios topológicos punteados* Top^**, está definida por:*

1. *Los objetos son ternas* (X, τ, x_0)*,* X *es un conjunto,* τ *una topología sobre* X *y* x_0 *es un punto de* X*.*
2. *Los morfismos en* Top^* *son funciones* $f : X \longrightarrow Y$*, continuas y tales que* $f^{-1}(y_0) = x_0$*.*

En general, en la categoría de los espacios topológicos punteados Top^*, un morfismo $f : (X, \tau_X, x_0) \longrightarrow (Y, \tau_Y, y_0)$ es una función continua tal que $f(x_0) = y_0$. Sin embargo, como lo acabamos de anotar, trabajaremos con una definición un poco más fuerte.

Haciendo uso de topologías iniciales y finales, veremos la forma de construir una clase de endofuntores de Top^*, que generan mediante sus puntos fijos, de acuerdo a su construcción, subcategorías reflexivas o correflexivas de Top^*.

2.2. Subcategorías reflexivas y correflexivas

Definición 2. *[1] Sea* $\mathcal{C}$ *una Categoría y* $\mathcal{H}$ *una subcategoría de* $\mathcal{C}$*. Se dice que* $\mathcal{H}$ *es reflexiva en* $\mathcal{C}$*, si para todo objeto* V *de* $\mathcal{C}$*, existe un objeto* V^* *en* $\mathcal{H}$ *y un morfismo* $r_V : V \to V^*$*, llamado la reflexión de* V*, tales que, para todo objeto* U *de* $\mathcal{H}$ *y todo morfismo* $f : V \to U$*, existe un único morfismo* $f^* : V^* \to U$ *en* $\mathcal{H}$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

Puede observarse fácilmente que la reflexión de cada objeto es única salvo isomorfismos.

Ahora, $\mathcal{H}$ es una subcategoría reflexiva de una categoría $\mathcal{C}$, sí y solamente sí, el funtor inclusión $I : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ tiene adjunto a izquierda. De manera dual se tiene la definición de subcategoría correflexiva y su caracterización en términos de la adjunción.

2.3. Ejemplos

1. La subcategoría plena de Top formada por los espacios completamente regulares es una subcategoría reflexiva de Top, ver [1].

2. Sea Met_u la categoría de los espacios métricos, cuyos morfismos son funciones uniformemente continuas y sea $\mathcal{H}$ la subcategoría plena de los espacios métricos completos. $\mathcal{H}$ es una subcategoría reflexiva de Met_u, ver [1].

3. La categoria de los espacios compactos Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios completamente regulares, ver [12].

4. Sea C la categoría de los espacios topológicos punteados. Los objetos de esta categoría son los espacios topológicos en los cuales se ha fijado un punto base y los morfismos son las funciones continuas que preservan el punto base. Sea $\mathcal{H}$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ formada por los espacios topológicos conexos punteados. Veamos que $\mathcal{H}$ es reflexiva en $\mathcal{C}$. Sea (X, τ_X, x_o) un espacio topológico punteado cualquiera y sea X^* la componente conexa de x_o. Entonces, se determina el espacio topológico (X^*, τ_{X^*}, x_o), donde τ_{X^*} es la topología relativa a X^*. El espacio topológico (X^*, τ_{X^*}) es conexo y la inclusión $i : X^* \to X$ es continua y es la correflexión de X, ver [4].

5. La categoría de los espacios secuenciales es una subcategoria correflexiva de Top, ver [1]. Otra demostración, haciendo uso de funtores elevadores, puede encontrarse en [8] y [4].

2.4. Un método de construcción de subcategorías reflexivas y correflexivas en la categoría Top

En particular, en los ejemplos 2 y 4 de la sección anterior, un espacio y su reflexión no tienen en general el mismo conjunto subyacente. Siguiendo a [8], en esta sección se muestra un método de construcción de subcategorías de Top^* en donde el espacio de partida y su reflexión (correflexión) tienen el mismo conjunto subyacente. Consideramos interesante el hecho de que las subcategorías construidas son además categorías topológicas, en el sentido de [1].

2.4.1. La estructura de categoría topológica de Top y Top^*

En la categoría de los espacios topológicos, la colección de topologías sobre un conjunto X tiene estructura de retículo completo, con el orden inducido por la inclusión, siendo la topología grosera el mínimo y la discreta el máximo. Dada un familia de topologías sobre X el ínfimo esta dado por la intersección y el supremo por la topología generada por la reunión.

En Top, sea $S = (f_\lambda, X)$ un sumidero cuyo dominio es la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ para todo $\lambda \in A$, entonces, la topología final para X correspondiente a la familia $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in A}$ y $\{f_\lambda\}_{\lambda \in A}$, es: $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid f_{\lambda}^{-1}(U) \in \tau_{\lambda},\ \forall \lambda \in A\}$. En tal caso, las funciones $f_{\lambda} : (X_{\lambda}, \mathcal{T}_{\lambda}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ resultan continuas y se verifica que para toda función $f : X \to Y$ tal que $f \circ f_{\lambda}$ es continua para todo λ, se tiene que f es continua. Dicha topología se llama la topología final para el sumidero dado. Para el caso particular en que la fuente consta de una sola función y ésta es sobreyectiva, se dice que la topología final es una topología cociente.

En particular dados un espacio topológico X y una relación de equivalencia R sobre X, se construye el conjunto cociente X/R y la función

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X/R \\ x &\longrightarrow J(x) = [x] \end{aligned}$$

La topología final sobre (X/R) inducida por J corresponde a la topología cociente. Ejemplos particulares de este hecho son el cilindro, el toro, la cinta de Mobius y la botella de Klein, que correponden a subespacios de R^3 obtenidos, definiendo para cada caso una relación adecuada en un rectángulo considerando este como subespacio de R^2.

De manera dual, se tiene la estructura inicial para la fuente: $F : (X, f_{\lambda})$, cuyo codominio es la familia $(X_{\lambda}, \mathcal{T}_{\lambda})$. Entonces, la topología inicial para X correspondiente a $\{\mathcal{T}_{\lambda}\}_{\lambda \in A}$ y $\{f_{\lambda}\}_{\lambda \in A}$, es la topología $\mathcal{T}$ generada por la familia: $\Lambda = \{f_{\lambda}^{-1}(u_{\lambda}) \subseteq X \mid u_{\lambda} \in \mathcal{T}_{\lambda}\}$.Las funciones $f_{\lambda} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X_{\lambda}, \mathcal{T}_{\lambda})$ son continuas y se verifica que para cada función $f : Y \to X$ tal que $f_{\lambda} \circ f$ es continua para todo λ, se tiene que f es continua. Dicha topología se llama la topología inicial para la fuente dada.

La discusión anterior toma como base el hecho de que la categoría de los espacios topológicos Top está fibrada a través del funtor olvido de estructura sobre la categoría de los conjuntos. Es de anotar que estas mismas consideraciones valen para las categorías Top^{*} definidas al comienzo, y fibradas con el funtor olvido sobre la categoría de los conjuntos punteados, bien sea considerando como morfismos las funciones que respetan el punto base o las que por imagen recíproca devuelven el punto base solo en el punto base. En todos estos casos, por los funtores en cuestión ser aptos escencialemente para construir topologías iniciales y finales se dice que Top y Top^{*} son categorías topologicas, según [1] fibradas respectivamente sobre Sets o sobre Sets*

2.4.2. Construcción de subcategorías reflexivas y correflexivas a través de topologías iniciales y finales

Haciendo uso de topologías iniciales y finales, veremos la forma de construir una clase de endofuntores de Top, que generan mediante sus puntos fijos reflexivas y correflexivas de Top.

Definición 3. *[8] Sean W y X espacios topológicos. En la colección de funciones continuas $f : W \to X$ al olvidar la topología de X se tiene el sumidero que notamos:*

$$s(W, X) = \left\{ f : W \to X \mid f \in [W, X]_{Top} \right\}$$

la topología final para $s(W, X)$ la notamos $Fs(W, X) = \mathbf{X}$.

Es de anotar que la topologia final obtenida corresponde a la mayor topoogia sobre X que hace continua a las funciones seleccionadas en cuestión. Ahora bien, de la definición de topología final para un sumidero, se sigue el siguiente lema.

Lemma 4. *Sean* W *y* X *espacios topológicos, entonces,*

1. $X \leq Fs\,(W, X)$
2. $[W, X]_{Top} \cong [W, Fs\,(W, X)]_{Top}$

En adelante, para simplicidad en la escritura, escribiremos $[W, X]$ *en vez de* $[W, X]_{Top}$

Teorema 5. *Sea* W *un espacio topológico. La aplicación*

$$E_W : Top \longrightarrow Top$$
$$X \longrightarrow E_W\,(X) = Fs\,(W, X)$$
$$E_W\,(f) = f$$

hace de E_W *un funtor.*

Demostración:

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua se debe ver que $E_W\,(f)$ es continua, en efecto $E_W\,(f) : E_W\,(X) \rightarrow E_W\,(Y)$ para esto basta demostrar que para toda $g \in s\,(W, X)$ la función $f \circ g : W \rightarrow E_W\,(Y)$ es continua. En efecto sea $g \in s\,(W, X)$, entonces $g : W \rightarrow X$ es continua, luego $f \circ g : W \rightarrow E_W\,(Y)$ es continua, entonces por definición de estructura final para un sumidero, se tiene que $f : S_W\,(X) \rightarrow S_W\,(Y)$ es continua.

Observaciones:

1. Con más precisión E_W es un elevador idempotente en Top, lo cual significa que el funtor agrega abiertos al espacio de partida, ver [8].
2. $E_W\,(W) = W$
3. $E_W\,(Top^*)$ es una categoría topológica, en el sentido de [1].
4. $E_W\,(Top^*) \leq Top^*$ y $E_W\,(Top^*)$ es correflexiva en Top^*.

De manera dual haciendo uso de estructuras iniciales, un espacio topológico da origen a un coelevador idempotente C.

En particular las subcategorías de Top, como son las de los espacios secuenciales y completamente regulares se obtienen con los métodos aquí descritos, resultando la primera una subcategoria correflexiva de Top y la segunda una subcategoría correflexiva de Top [8].

Las nociones de elevador y coelevador en Top^* son las mismas que las dadas en la sección 2.4.2, partiendo en cada caso de un endofuntor definido en Top^*. Ahora bien, en forma análoga se tiene que la subcategoría plena de Top^* formada por los puntos fijos o la imagen de un elevador idempotente definidos en Top^* es correflexiva en Top^* y de manera natural se obtienen los resultados duales.

3. Inmersión de subcategorías de Top^* en topos de prehaces

3.1. Haces de conjuntos sobre un espacio topológico

Definición 6. *[7] Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría pequeña, un prehaz sobre* $\mathcal{C}$ *es un funtor* $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Conj$. *La categoría* $Conj^{\mathcal{C}^{op}}$, *tiene por objetos a los prehaces de conjuntos sobre la categoría* $\mathcal{C}$ *y por morfismos a las transformaciones naturales. De esta forma, la categoría* $Conj^{\mathcal{C}^{op}}$ *es un topos. Un topos de Grothendieck es un topos equivalente a uno de la forma* $Conj^{\mathcal{C}^{op}}$. *Un caso particular es el que se describe a continuación.*

Dado un espacio topológico (X, τ). Al considerar como objetos a los elementos de τ y

VÍNCULOS
ENERO - JUNIO DE 2013
VOLUMEN 10 ■ NÚMERO 1

como morfismos las contenencias se determina la categoría que notamos τ, por abuso del lenguaje, en tal caso se determina la categoría de los prehaces de (X, τ) y que se nota $set^{\tau^{op}}$. Haciendo uso de una topología de Grothendieck, ver [7]. Se determina la subcategoría plena de $set^{\tau^{op}}$ notada $Sh(X)$ cuyos objetos se les denomina haces.

Así, $Sh(X)$ es una subcategoría reflexiva de $set^{\tau^{op}}$, ver [7]. Ahora bien, dada una categoría $\mathcal{C}$, para cada objeto A de $\mathcal{C}$ se determina la categoría Coma denotada $\mathcal{C}/A$ de las flechas de $\mathcal{C}$ que llegan a A, cuyos objetos son parejas de la forma (B, f), donde B es un objeto de $\mathcal{C}$ y f un morfismo de B en A y los morfismos son triángulos conmutativos,

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

esto es , un morfismo h entre dos objetos (B, f) y (C, g) es un morfismo $h : B \longrightarrow C$ tal que $g \circ h = f$. Si en particular $\mathcal{C}$ es un topos, $\mathcal{C}/A$ es un topos.Ahora bien, Top no es un topos, pues Top no tiene exponenciación. Entonces, dado un espacio topológico X, no se podría deducir que Top/X es un topos. Sin embargo al imponer condiciones sobre los objetos de Top/X, se determina un topos equivalente a $Sh(X)$. Veamos este hecho con un poco más de precisión. Sea X un espacio topológico, se determina la categoría Top/X, cuyos objetos son pares (E, p) donde E es un espacio topológico y $p : E \longrightarrow X$ es un homeomorfismo local [4], los morfismos de esta categoría son funciones continuas $f : (E, p) \longrightarrow (E', p')$ que satisfacen $p' \circ f = p$. Top/X es equivalente a la categoría $Sh(X)$, ver [7].

3.2. Otra forma de asociar un topos de prehaces a un espacio topológico.

3.2.1. Topos de M - conjuntos

Dado un monoide M, $(M, \circ, e)$, con identidad e y cuya operación binaria es $\circ$, se determina la categoría $\mathcal{C}$, formada por un solo objeto $\{*\}$ y cuyos morfismos son los elementos de M, la ley de composición entre los morfismos está dada por la operación de M. En tal caso se determina el topos de prehaces que notamos Set^M que es equivalente al topos de M - Conjuntos.

Los objetos de M - Sets son llamados m - conjuntos y sus morfismos m - aplicaciones. Un m -conjunto es un conjunto X con una acción a derecha λ de M sobre X

$$\lambda : X \times M \longrightarrow X$$
$$(x, f) \longmapsto x\lambda f$$

que verifica las siguientes condiciones:

Una m–aplicación entre dos m–conjuntos (X, λ) , (Y, β) es una función $h : X \longrightarrow Y$ que satisface $h(x\lambda(f)) = h(x)\beta f$.

A continuación veremos la manera de sumergir algunas subcategorías de Top^* en topos de $M-$conjuntos.

En lo que sigue, identificamos $(X, \tau_X, x_0) = \mathbb{X}^*$ si no es necesario resaltar el punto base y

[4] p es homeomorfismo local si cada vecindad abierta de $e \in E$ es aplicada homeomórficamente en un abierto de X

la topología.

3.2.2. Inmersión de Subcategorías correflexivas de Top^* en un topos de prehaces

Dado un espacio topológico W, este determina un elevador E_W, de tal manera, que la subcategoría plena de Top, formada por sus puntos fijos, que hemos notado E_W, es una subcategoría correflexiva de Top. En [8] se muestra la manera de sumergir E_W en un topos de $M-$conjuntos. En la presente sección se amplia esta teoría produciendo resultados originales, tomando como punto de partida la categoría Top^*.

Definición 7. *Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Se dice que F es fiel, si para todo par de morfismos $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ de $\mathcal{C}$ tales que $F(\mathbf{f}) = F(\mathbf{g})$, se tiene que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Se dice que F es pleno, si para todo par de objetos $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ de $\mathcal{C}$ y todo morfismo $k : X \longrightarrow Y$ existe un morfismo $\mathbf{k} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, tal que $F(\mathbf{k}) = k$.*

Sea $\mathbb{W}^* \in ObjTop^*$, consideramos el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{W}^* \longrightarrow \mathbb{W}^*$ que adicionalmente cumplen $\mathfrak{f}^{-1}(w_o) = w_o$. Entonces, $[\mathbb{W}^*, \mathbb{W}^*]$ con la composición de funciones continuas es un monoide que notamos $M_{\mathbb{W}^*}$. El topos determinado por $M_{\mathbb{W}^*}$, lo notamos $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$.

Dado un espacio W^* en Top^* de manera natural se determina una inmersión de Top^* en el topos $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$. En efecto cada espacio X^* de Top^* se interpreta en $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$ como el $M-$conjunto $[\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*]$

$$\begin{aligned} Top^* &\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{W}^*} \\ \mathbb{X}^* &\longmapsto [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*] \end{aligned}$$

en donde $[\mathbb{W}^*, \mathbb{W}^*]$ actúa por composición

$$\begin{aligned} \circ : [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*] \times M_{\mathbb{W}^*} &\longrightarrow [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*]_{Top^*} \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

y cada función continua $f : \mathbb{X}^* \longrightarrow \mathbb{Y}^*$ se interpreta como la $M - aplicacion$

$$\begin{aligned} \bar{f} : [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*] &\longrightarrow [\mathbb{W}^*, \mathbb{Y}^*] \\ h &\longmapsto \bar{f}(h) := f \circ h \end{aligned}$$

Para cada espacio topológico punteado $\mathbb{X}^*$ y su identidad $i_{\mathbb{X}^*} : \mathbb{X}^* \longrightarrow \mathbb{X}^*$ se tiene que $\bar{i} : [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*] \longrightarrow [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*]$ es la identidad de $[\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*]$ en $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$.

Ahora, si $f : \mathbb{X}^* \longrightarrow \mathbb{Y}^*$ y $g : \mathbb{Y}^* \longrightarrow \mathbb{Z}^*$ son dos funciones continuas se cumple que $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$, luego, de las últimas construcciones se determina el funtor

$$\begin{aligned} \Sigma_{W^*} : Top^* &\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{W}^*} \\ \mathbb{X}^* &\longmapsto \Sigma_{W^*}(\mathbb{X}^*) = [\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*]_{Top^*} \end{aligned}$$

y $\sum_{W^*}(f) := \overline{f}$

Por lo tanto, se determina la restricción de $\sum_{\mathbb{W}^*}$ a $E_{\mathbb{W}^*}(Top^*)$. Así

$$\Sigma_{W^*} : E_{\mathbb{W}^*}(Top^*) \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$$

En general, este funtor no es fiel. En efecto, sea $\mathbb{W}^*$ como el espacio de Sierpinsky $(\{0,1\}, \{\{0,1\}, \emptyset, \{0\}\}, 1)$. Ahora, consideremos el espacio $\mathbb{R}^*$, con $(\mathbb{R}, \mu, 0)$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, μ la topología usual. Las funciones $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = x$ y $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ definida por $g(x) = 2x$ son morfismos en esta categoría. Nótese que no hay morfismos de $\mathbb{W}^*$ en $\mathbb{R}^*$, así que, $[\mathbb{W}^*, \mathbb{R}^*] = \emptyset$. El único morfismo del m-conjunto $\emptyset$ es la identidad y $E_{\mathbb{W}^*}(f) = E_{\mathbb{W}^*}(g) = 1_\emptyset$ y $f \neq g$.

Observación

Puesto que en general, el funtor $\sum_{\mathbb{W}^*}$ no es fiel y pleno no se puede interpretar a $\sum_{\mathbb{W}^*}(Top^*)$ como una subcategoría reflexiva de $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$; hecho que sí sucede cuando se trabaja en Top, [8].

A continuación el objetivo en esta parte del trabajo, es hallar condiciones sobre $\mathbb{W}^*$, de tal manera que la inmersión $\sum_{\mathbb{W}^*}$ sea fiel y pleno. Para esto se hace necesario describir las funciones constantes de Top^* e imponer condiciones sobre el punto base, pues como se verá, serán la clave para conseguir el objetivo propuesto

La categoría $\mathbf{Top}^*_{\mathbf{AC}}$

En esta sección consideraremos la subcategoría plena de Top^*, que notaremos Top^*_{AC} cuyos objetos son espacios punteados, donde el punto base es abierto y cerrado.

Si (X,τ,x_0) y (Y,α,y_0) son dos espacios topológicos punteados. Una función constante $f:(X,\tau,x_0)\longrightarrow(Y,\alpha,y_0)$ es de la forma

$$f(x):=\begin{cases} y_0 & \text{si } x=x_o\\ y_1 & \text{si } x\neq x_o, \quad \text{y} \quad y_1\in Y,\, y_1\neq y_0\end{cases}$$

f definida de esta forma es continua. Nótese que si el cardinal de X es mayor que 1, entonces el cardinal de Y es mayor que 1. Ahora bien, sea $B\in\alpha$, tal que $y_o\in B$. Entonces, $f^{-1}(B)=\{x_o\}$ si $y_1\notin B$ y $f^{-1}(B)=X$ si $y_1\in B$. Ahora si $y_o\notin B$ y $y_1\in B$, $f^{-1}(B)=X-\{x_o\}$. Si $y_1\notin B$ $f^{-1}(B)=\emptyset$, entonces, la función f así definida es continua. Notese que no existe función constante de valor y_o.

Si consideramos el funtor $E_{\mathbb{W}^*}:Top^*_{AC}\longrightarrow Top^*_{AC}$, entonces, se tiene el siguiente teorema

Teorema 8. *El funtor* $\sum_{\mathbb{W}^*}$: $E_{\mathbb{W}^*}(Top^*_{AC})\longrightarrow\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$ *es fiel y pleno.*

Demostración. Veamos que $\sum_{\mathbb{W}^*}$ es fiel. Sean $f,\ g:\mathbb{X}^*\longrightarrow\mathbb{Y}^*$ dos funciones continuas, si $\overline{f}=\overline{g}$, entonces para cada $x\in X^*$ $x\neq x_o$ tenemos la función constante $h_x:\mathbb{W}^*\longrightarrow\mathbb{X}^*$ $h_x(w)=x,\ w\neq w_o$, esta función h_x cumple que $\overline{f}(h_x)=\overline{g}(h_x)$ de donde $f(x)=g(x)$ esto es $f=g$.

Veamos ahora, que $\sum_{\mathbb{W}^*}$ es pleno. Tomemos $\mathbb{X}^*,\mathbb{Y}^*$ dos espacios topológicos y $\overline{\alpha}:[\mathbb{W}^*,\mathbb{X}^*]_{Top}\longrightarrow[\mathbb{W}^*,\mathbb{Y}^*]_{Top}$ una $M-$*aplicacion*. Para cada $w\in\mathbb{W}^*, w\neq w_o$ se tiene la función constante $\gamma_{\mathbb{W}}:\mathbb{W}^*\longrightarrow\mathbb{W}^*$

$$\gamma_{\mathbb{W}}(w)=\begin{cases} w & \text{si } w\neq w_o\\ w_o & \text{si } w=w_o\end{cases}$$

y para cada $x\in\mathbb{X}^*$ $x\neq x_o$ la función $\mathrm{f}_x:\mathbb{W}^*\longrightarrow\mathbb{X}^*$ tal que

$$\mathrm{f}_x(w)=\begin{cases} x & \text{si } w\neq w_o\\ x_o & \text{si } w=w_o\end{cases}$$

Los elementos constantes en los $M-$*conjuntos* $[\mathbb{W}^*,\mathbb{X}^*]_{Top}$ corresponden a las funciones constantes. En efecto si $\overline{\alpha}$ es una $M-$*map*, $\overline{\alpha}$ preserva los elementos constantes, entonces se determina el morfismo $\alpha:\mathbb{X}^*\longrightarrow\mathbb{Y}^*$ definido por $\alpha(x):=(\overline{\alpha}\mathrm{f}_x)(w)$

Sea $w\in\mathbb{W}^*,\ w\neq w_o$, $(\alpha\circ h)(w)=\alpha\big(h(w)\big)=\overline{\alpha}\ \mathrm{f}_{h(w)}(w)=\overline{\alpha}(h\circ\gamma_{\mathbb{W}})(w)=(\overline{\alpha}\circ h\circ\gamma_{\mathbb{W}})(w)=\overline{\alpha}\ h(w)$, luego $\overline{\alpha}\ h=\alpha\circ h$.

Finalmente, si $\mathbb{X}^*\in E_{\mathbb{W}^*}(Top^*)$ y $f\in[\mathbb{W}^*,\mathbb{X}^*]_{Top}$ $\overline{\alpha}(f)\in[\mathbb{W}^*,\mathbb{Y}^*]_{Top}$ por definición de estructura final $\alpha:\mathbb{X}^*\longrightarrow\mathbb{Y}^*$ es continua. Por lo tanto, $\sum_{\mathbb{W}^*}$ es pleno. □

Teorema 9. *Sea* $\mathbb{W}^*$ *un objeto de* Top^*_{AC}. *Entonces, la categoría* $E_{\mathbb{W}^*}(Top^*_{AC})$ *es isomorfa a una subcategoría plena de* $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la subcategoría plena de $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$ formada por los $M-conjuntos$ de la forma $[\mathbb{W}^*, \mathbb{X}^*]_{Top}$ donde $\mathbb{X}^* \in E_{\mathbb{W}^*}(Top^*)$ entonces, por el teorema anterior $E_{\mathbb{W}^*}(Top^*_{AC}) \cong \mathcal{C}$. □

Observación

Se ha probado que si $\mathbb{W}^* \in Top^*_{AC}$, el funtor $\sum_{\mathbb{W}^*}$ es fiel y pleno, con lo cual se puede interpretar a $E_{\mathbb{W}^*}(Top^*_{AC})$ como una subcategoría plena de $\mathcal{E}_{\mathbb{W}^*}$.

4. Una nota relacionada con topos geométricos asociados a espacios punteados A- compactos

Los topos geométricos se definen en [8] y aparecen como aquellos topos de $M-$ conjuntos, definidos a partir de monoides determinados por los endomorfismos de un espacio topológico en donde al interpretar un espacio topológico en el topos, las acciones resultan continuas, con respecto a la topología del producto tensorial. En esta sección se muestran ejemplos de topos geométricos asociados a objetos $A-$compactos de Top^*, en otras palabras espacios topológicos punteados en donde cada subespacio abierto es compacto.

4.0.3. El producto tensorial en categorías fibradas sobre conjuntos

Definición 10. *Ver [1] Sea $\mathcal{C}$ una categoría fibrada sobre la categoría de los conjuntos, es decir, intuitivamente los objetos de $\mathcal{C}$ son conjuntos con alguna estructura y los morfismos son funciones que respetan la estructura y sean X, Y y Z objetos de $\mathcal{C}$. Se dice que una función $f : X \times Y \longrightarrow Z$ es un bimorfismo, si las funciones $f_x : Y \longrightarrow Z$, $f_x(y) := f(x, y)$ y $f_y : X \longrightarrow Z$, $f_y(x) := f(x, y)$, son morfismos de la categoría $\mathcal{C}$*

Definición 11. *Ver [1] Sean X y Y dos objetos de la categoría $\mathcal{C}$. Una pareja (Z, f) donde Z y f son respectivamente, un objeto y un morfismo en $\mathcal{C}$. Un bimorfismo $f : X \times Y \longrightarrow Z$ es un producto tensorial de X y Y, si para cualquier otra pareja (W, g) tal que $g : X \times Y \longrightarrow W$, $W \in obj\, \mathcal{C}$, existe un único morfismo $\phi : Z \longrightarrow W$, tal que, $\phi \circ f = g$.*

El producto tensorial de dos objetos X, Y si existe, es único y por tanto lo notamos $X \bigotimes Y$ Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ tiene productos tensoriales, si para cualquier par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ existe $X \bigotimes Y$ en la categoría.

4.0.4. El producto tensorial en Top

Esta discusión toma como base [1].
Sean (X, α) y (Y, β) dos objetos de Top. Si consideramos el funtor $\mathcal{O} : Top \longrightarrow Conj$, por la proposición anterior, el producto tensorial de X y Y existe y está dado por la pareja $(X \bigotimes Y, i)$, donde, $X \bigotimes Y$ es el espacio topológico con conjunto subyacente $X \times Y$ y una topología Γ determinada de la siguiente forma: se sabe que $i : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ es un bimorfismo, $U \in \Gamma$, si y solo si, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, $i_x^{-1}(U) = \{y \mid (x, y) \in U\} \in \alpha$ y $i_y^{-1}(U) = \{x \mid (x, y) \in U\} \in \beta$, entonces, la pareja $(X \bigotimes Y, i) = [(X \bigotimes Y, \Gamma), i]$ es el producto tensorial de los espacios topológicos (X, α) y (Y, β).

4.0.5. Topos geométricos

Sea M un monoide topológico. Se determina el topos de $M-$conjuntos $\mathcal{E}_M$. Un $M-$conjunto

X con la acción α determina un sumidero $\{\alpha_x : M \longrightarrow X\}_{x\in X}$, donde, $\alpha_x(m) := x\,\alpha\, m$, si se considera F_{α_x} la topología final para este sumidero, entonces, α_x resulta continua para cada $x \in X$ y por tanto $\alpha : X \times M \longrightarrow X$ resulta continua con respecto a la topología producto tensorial. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una $M-$aplicación, entonces, $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ resulta continua. En efecto, sean α y β las acciones de M sobre X y Y respectivamente. Basta demostrar que para cada $x \in X$, la función $f \circ \alpha_x : M \longrightarrow Y$ es continua. Observamos que $f \circ \alpha_x = \beta_{f(x)}$ y $\beta_{f(x)}$ es continua. Entonces, por definición de estructura final para un sumidero se tiene que $\mathbf{f} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es continua y por tanto se ha determinado el funtor

$$T : \mathcal{E}_M \longrightarrow Top \tag{1}$$

donde $T(X) = \mathbb{X} = F_{\alpha_x}$; $T(f) = \mathbf{f}$, además $T(M) = M$.

Ahora, si X es un $M-$conjunto $\alpha : X \times M \longrightarrow X$ la acción correspondiente. Veamos que la función $\alpha : X \bigotimes M \longrightarrow X$ es continua. Por la propiedad universal del producto tensorial, es suficiente probar que $\alpha : X\times M \longrightarrow X$ es un bimorfismo en Top. Consideremos las familias de funciones

$$\{\alpha_x : M \longrightarrow X\}_{x\in X};\ \{\alpha_m : X \longrightarrow X\}_{m\in M}$$

definidas de manera natural o a través de α

Notese, que de la forma como se construyó a $F_{\alpha_x} = X$; las funciones $\alpha_x : M \longrightarrow X$ son continuas. Ahora, sea $m \in M$, veamos que $\alpha_m : X \longrightarrow X$ es continua, para lo cual es suficiente probar que para cada $x \in X$, $\alpha_m \circ \alpha_x : X \longrightarrow X$ es continua, $\alpha_m \circ \alpha_x = \alpha_{x\circ m}$ es continua, pues $x \circ m \in X$ y X tiene la topología final, por lo tanto, cada función $\alpha_m : X \longrightarrow X$ es continua. Entonces, $X \times M \longrightarrow X$ es un bimorfismo y por tanto $\alpha : X \bigotimes M \longrightarrow X$ es continua.

Finalmente, en esta parte es de anotar que, si desde el comienzo de la discusión en particular consideramos a M como un monoide topológico conmutativo, entonces la acciones $\alpha : X \times M \longrightarrow X$ resultan continuas con respecto a la topología del producto tensorial. En efecto, con las notaciones dadas arriba, basta demostrar que para todos $m \in M$ y $x \in X$ las funciones $\alpha \circ i_m$ y $\alpha \circ i_x$ son continuas. Por la forma en que se construye la topologia para X, para todo $x \in X$, las funciones α_x son continuas y $\alpha \circ i_x = \alpha_x$. Ahora bien, $\alpha \circ i_m(x) = \alpha_m(x)$ y α_m es continua, para lo cual debemos probar que para todo $x \in X$ las funciones $\alpha_m \circ \alpha_x$ son continuas, pero puede observarse que, puesto que M es abeliano se tiene que $\alpha_m \circ \alpha_x$ es igual a α_{xm} las cuales son continuas. Entonces, puesto que la topología del producto tensorial es una topología final para la familia de funciones determinada por reunión de los conjuntos $\{\alpha_x : M \longrightarrow X\}_{x\in X}$; $\{\alpha_m : X \longrightarrow X\}_{m\in M}$, se tiene α continua.

Definición 12. *Ver [8] Sea $\mathcal{E}$ un Topos, $G : \mathcal{E} \longrightarrow Top$ un funtor y M un monoide topológico. Se dice que $\mathcal{E}$ es un $(G - M)-$Topos geométrico o simplemente un Topos geométrico (cuando no haya lugar a confusión), si existe una equivalencia de categorías $F : \mathcal{E}_M \longrightarrow \mathcal{E}$, tal que $G \circ F = T$ (siendo $T : \mathcal{E}_M \longrightarrow Top$ el funtor descrito en 1)*

Sean X y Y espacios topológicos. Sea $\mathcal{C}$ la colección de subconjuntos compactos de X y $\mathcal{A}$ la colección de los subconjuntos abiertos de Y. Sean $S \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{A}$ y $[S, A] = \{f \in [X, Y]_{Top} \mid f(S) \subset A\}$.

La topología $\mathcal{T}$ sobre $[X, Y]_{Top}$ generada por la familia $\mathcal{S} = \{[S, A] \mid S \in \mathcal{C}, A \in \mathcal{A}\}$, se le llama la topología compacto abierta sobre $[X, Y]_{Top}$. En tal caso $\mathcal{S}$, es una subbase para $\mathcal{T}$. [12]

Definición 13. *Un espacio topológico W es $A-$compacto, si sus subespacios abiertos son compactos*

Proposición 14. *Ver [8] Sea W un espacio $\mathcal{A}$-compacto. Si $[W, W]_{Top}$ tiene la topología compacto abierta α, entonces $([W, W]_{Top}, \circ, \alpha)$ es un monoide topológico*

Sea W^* un espacio topológico punteado, con la topología Cof^*, donde $Cof^* = Cof \cup \{\{w_0\}\}$, siendo Cof la topología de los complementarios finitos. Entonces, W^* es $A-$compacto, por lo tanto, el monoide $[W^*, W^*]_{Top}$, dotado de la topología compacto abierta α, hace de $\big([W^*, W^*]_{Top}, \alpha\big)$ un monoide topológico. Puede observarse que la topología sobre $[W^*, W^*]_{Top}$ corresponde a la topología relativa de $[W^*, W^*]_{Top}$ con respecto al espcio $[W, W]_{Top}$ con la topología compacto abierta. Por lo tanto $\mathcal{E}_{W^*}$ es un Topos geométrico.

En particular, si se toma $W^* = \mathbb{N}^*$, entonces, $\big([\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*], \alpha\big)$, donde α es la topología de los complementarios finitos, es un monoide topológico con la topología compacto abierta definida sobre $[\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*]_{Top^*}$, luego $\mathcal{E}_{\mathbb{N}^*}$ es un Topos geométrico.

Referencias

[1] J. Adamek., H. Herrlich , G. Strecker , *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.

[2] V. Ardila, J. Montañez, C. Ruiz, *Nociones equivalentes de Categorías Topológicas*, Boletín de Matemáticas. Nueva serie. **VII** (2000) no. 1 19–27.

[3] J. Hernández, *Sobre las subcategorís reflexivas y correflexivas en la categoría de los espacios topológicos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[4] J. Hernández, R. Montañez, C. Ruiz, *Nociones de mejoramiento en la categoría* de los espacios topológicos Revista visión electrónica Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Por aparecer.

[5] P.T Johnstone, *On a topological Topos*, Proc. London Math. Soc (3) 38 (1979), 237-271.

[6] P.T. Johnstone, *Sketches of an Elephant*, A Topos Theory , Vol 1, 2, Oxford Science, Publications, 2002.

[7] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to topos Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[8] R. Montañez, *Funtores Elevadores y Coelevadores de Estructuras*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2007.

[9] R. Montañez, C. Ruiz *Elevadores de Estructura*, Boletín de Matemáticas. Nueva serie. **XIII** (2006) No. 2 pp. 111-135.

[10] A. Oostra, *Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales*, Lecturas Matemáticas, **16** (1995), 63-72.

[11] G. Preuss, *Theory of Topological Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. 1988.

[12] S. Willard, *General Topology*, Adisson Wesley Publishing Company. 1970.

[13] Xavier Caicedo, *Introducción a los Topos de Grothendieck*, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, 1988.